

아래는 [제시문 2]에서 주어진 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$ 가 연속 함수가 될 수 없음을 보이는 증명입니다. 아래의 증명과정은 문제에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 연속함수가 아님을 밝힌 것으로 증명과정, 사용된 개념 등은 교육부 고시에 따른 고등학교 교육과정의 범위와 수준과는 무관합니다.

실수 전체의 집합에서 정의된 연속 함수 $f(x)$ 는 다음 세 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad \frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$(나) \quad f(x + \pi) = \frac{1 + \sqrt{6f(x) - 9\{f(x)\}^2}}{3}$$

$$(다) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \{3f(x) - 1\} dx = \pi$$

위 세 조건을 모두 만족시키는 함수는 연속 함수가 될 수 없는 이유는 아래와 같다.

함수 $g(x) = 3f(x) - 1$ 이라 두면, 조건 (가)에 의해서

(1) $0 \leq g(x) \leq 1$ 이 성립하고, 조건 (나)에 의해서

(2) $g(x + \pi)^2 = 1 - g(x)^2$ 이 성립한다.

따라서 $g(x + 2\pi)^2 = 1 - g(x + \pi)^2 = g(x)^2$ 이 성립하고, $g(x) \geq 0$ 이므로

(3) $g(x + 2\pi) = g(x)$ 임을 알 수 있다.

한편, (2)의 식에서

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \{g(x + \pi)^2 + g(x)^2\} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi \text{임을 알 수 있다.}$$

그런데, (3)에 의하여 $g(x)$ 가 주기가 2π 인 함수이므로

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} g(x + \pi)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx \text{임을 알 수 있으며,}$$

$$(4) \text{과 } (5) \text{로부터 } \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx = \pi \text{임을 알 수 있다.}$$

한편, 조건 (다)에서 $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \pi$ 이므로, $\int_{-\pi}^{\pi} \{g(x) - g(x)^2\} dx = 0$ 이라는 결론을 얻는다.

그러나 (1)로부터 $g(x) - g(x)^2 \geq 0$ 이므로, $g(x) - g(x)^2 = 0$ 이어야 하고, 따라서 $g(x) = 0$ 또는 $g(x) = 1$ 을 만족하여야 한다. 이는 $f(x) = \frac{1}{3}$ 또는 $f(x) = \frac{2}{3}$ 라는 것과 동치이다.

그러므로 $f(x)$ 가 연속이라면, $f(x)$ 는 상수 함수로서 $f(x) = \frac{1}{3}$ 또는 $f(x) = \frac{2}{3}$ 이어야만 하는데, 어떤 경우에도 조건 (다)에 모순이다.

※ 연속이라는 조건을 제외하면 [제시문 2]에서 주어진 세 조건을 모두 만족하는 함수는 수없이 많다.

예를 들어, $f(x)$ 를 주기가 2π 인 함수로서 구간 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (0 \leq x < \pi) \\ \frac{1}{3} & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$$

로 정의하면, 세 조건을 모두 만족한다. 그러나 이 함수는 연속 함수가 아니다.